

# RUEDA QUE RUEDA, REDONDA NO ES ¿QUÉ ES?

WHEEL THAT ROLLS, IT'S NOT  
ROUND WHAT IS IT?

Paulina Troncoso • Natalie Medina  
Profesor Guía: Edgar Illanes  
Liceo Agrícola Tecnológico Werner Grob Stolzenbach, La Unión  
Asesor Científico: Eugenio Trucco  
Evaluador: Andrea Astudillo

## Resumen

Considerando la existencia y características de las figuras de ancho constante, el objetivo de esta investigación, tipo cuantitativa, tiene relación con la creación de nuevas figuras e indagación bibliográfica que permita nutrir de conocimiento sobre este tipo de figuras. Por esta razón, la pregunta de investigación fue identificar si existen más figuras de ancho constante, no descritas. Para ello, se llevó a cabo el proceso de experimentación mediante la utilización de materiales como transportador, lápiz, entre otros, obteniendo unos primeros resultados positivos y negativos; mediante un método de construcción propio, utilizando triángulos y pentágonos tanto regulares como irregulares, donde el método de experimentación fue en base al mismo principio de crear la figura, para luego dibujar líneas que se extienden de cada lado de la figura, para luego formar las curvas de circunferencia, tomando el vértice opuesto al lado. Una vez creadas las figuras, se procedió a comprobar mediante cálculos de área y perímetro, para corroborar si pertenecían a la familia de figuras de ancho constante. De igual forma, se realizó una revisión bibliográfica que permitió ahondar utilizaciones de las figuras, dentro de ellas los polígonos de Reuleaux y en especial el triángulo de Reuleaux.

**Palabras claves:** Figuras de ancho constante; Arcos de circunferencias; Círculos; Polígonos de Reuleaux.

## Abstract

Considering the existence and characteristics of figures of constant width, the objective of this research, quantitative type, is related to the creation of new figures and bibliographic research that allows to nurture knowledge about this type of figures. For this reason, the research question was to identify if there are more figures of constant width, not described. For this, the experimentation process was carried out by using materials such as a conveyor, pencil, among others, obtaining first positive and negative results; by means of a method of own construction, using both regular and irregular triangles and pentagons, where the experimentation method was based on the same principle of creating the figure, and then drawing lines that extend from each side of the figure, to later form the circumference curves, taking the vertex opposite the side. Once the figures were created, they proceeded to check by calculating area and perimeter, to corroborate whether they belonged to the family of figures of constant width. In the same way, a bibliographic review was carried out that allowed to deepen the uses of the figures, within them the Reuleaux polygons and especially the Reuleaux triangle.

**Keywords:** Figures of constant width; Arcs of circumferences; Circles; Polygons of Reuleaux.

El Proyecto participó en:

\* Congreso Regional Explora CONICYT de la Región de Los Ríos.



# Introducción

La finalidad de este proyecto es contribuir con un aporte al conocimiento y las aplicaciones de las figuras de ancho constante, es decir, figuras que poseen la evidente cualidad de tener el mismo diámetro en la forma que sea medida. Siendo el círculo el más conocido, por poder rodar entre dos paralelas manteniendo la misma altura, motivo por el cual es tan utilizada en el mundo, donde claramente se encuentra formando parte de múltiples objetos en la vida de las personas. Pero el círculo no es la única figura de ancho constante, existen varias más, de las cuales los polígonos de Reuleaux, son los más reconocidos y utilizados. De ahí el motivo de esta investigación, que pretende construir nuevas figuras de ancho constante a partir de diversos polígonos en la etapa de experimentación, de tal manera de aportar con nuevas figuras con anchura constante y nuevas formas de creación, como también realizar un estudio bibliográfico que identifique sus aplicaciones en el mundo, demostrando que el círculo no es la única figura que puede rodar sin generar un vaivén.

Por lo tanto, esta investigación pretende generar los primeros cimientos en Chile, y Sudamérica, sobre el estudio y formas de construcción de figuras de ancho constante que sean distintas a las circulares, las cuales pudieran ser tomadas como referencias para aplicarlas a la vida diaria de las personas, de tal forma de cambiar la perspectiva absolutista y antigua que solo los círculos pueden ser utilizados en objetos que requieran utilizar figuras de ancho constante.

## Hipótesis

Queremos hacer notar que en matemática el concepto de hipótesis difiere del usado en el contexto del método científico. En matemática una hipótesis es una premisa, adicional a los axiomas de la teoría, que permite la deducción de una conclusión. No es una respuesta que busque ser demostrada por medio de experimentación.

Una vez hecha esta salvedad, las hipótesis que utilizaremos son las usuales en la corriente principal en matemática, esto es, asumiremos los axiomas de la teoría de conjunto de Zermelo y Fraenkel junto con el axioma de elección.

## Objetivo general

Construir nuevas figuras de ancho constante y estudiar sus propiedades.

## Objetivos específicos

- Conocer distintas curvas de ancho constante descritas en la literatura.
- Crear nuevas figuras de ancho constante, a partir de diversas figuras geométricas.
- Determinar fórmulas para calcular área y perímetro de figuras de ancho constante.



- Identificar las aplicaciones de las figuras de ancho constante en la vida real.

## Metodología

La investigación es cuantitativa de tipo experimental, y pretende construir nuevas figuras de ancho constante, donde todo el proceso investigativo se puede resumir en las siguientes fases:

### Exploratoria

Se comenzó con un estudio bibliográfico sobre las figuras de ancho constante, para tener un conocimiento más acabado de ellas, destacando por ejemplo el círculo, junto a los polígonos de Reuleaux para poder tener claridad de las formas de construcción. Además de analizar al círculo como figura de ancho constante que rueda sin generar un vaivén entre dos paralelas por ejemplo.

### Construcción de figuras

Posteriormente en el proceso de experimentación, utilizando lápices de grafito, compás, regla, hojas de oficio y transportador, se procedió a la construcción de figuras que pudieran ser consideradas de ancho constante, el método consistió en no seguir patrones establecidos ya descritos en la literatura o en software, más bien trabajar con la imaginación y formas de creación propia ligadas a cada creador, utilizando como base, polígonos regulares e irregulares, de diferentes familias, dentro de ellos destacan; triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y heptágonos. Donde para crearlas, a cada figura se le trazaron arcos de circunferencia entre sus vértices, para luego corroborar a través de mediciones los resultados obtenidos y poder categorizarlas como positivas o negativas.

### Determinación de área y perímetro

Luego, se trabajó en la determinación de áreas y perímetros de algunas de estas figuras en cuestión, que fueron el triángulo de Reuleaux y las figuras construidas y categorizadas como positivas, obteniendo fórmulas generales que permitieron comprobar que pertenecen a la familia de figuras de ancho constante.

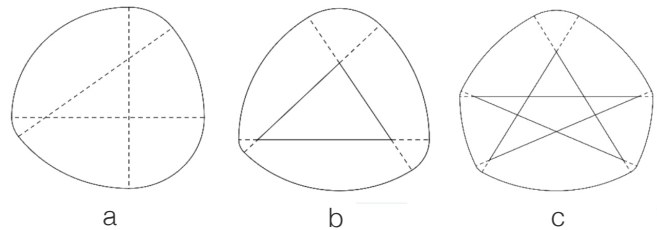
## Estudio bibliográfico de las figuras de ancho constante

En el estudio bibliográfico se estableció que las figuras de ancho constante se encuentran en la vida cotidiana cumpliendo diversas funciones, como en el caso de tapas de alcantarillas, vitrales, formas de lápices, ruedas de bicicletas, brocas, logos de vehículos, entre otras aplicaciones más.

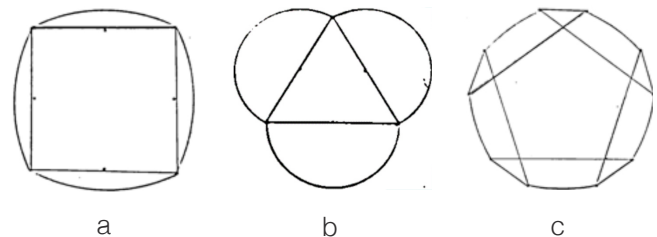
## Resultados

- Se conocieron figuras de ancho constante, específicamente los polígonos de Reuleaux, y dentro de ellos principalmente al triángulo de Reuleaux a través de la indagación bibliográfica y se logró determinar que estas son construidas a base de polígonos regulares.
- Se crearon figuras de ancho constante, utilizando métodos propios de creación, a partir de polígonos regulares e irregulares. Entregando los siguientes resultados:

- Resultados positivos: Figuras que pueden ser catalogadas como de ancho constante, donde se describe los polígonos utilizados:



- Resultados negativos: Figuras que no pueden ser catalogadas como de ancho constante, donde se describen los polígonos utilizados como base:



C. Se encontraron expresiones para calcular el área y perímetro de las figuras encontradas:

C.1 El perímetro parece ser constante e igual a  $\pi l$ , donde  $l$  es el ancho de las figuras construidas y analizadas.

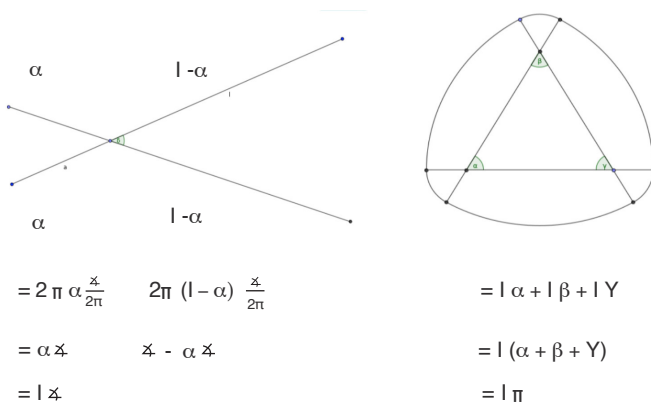


Figura C.1: Representación de los cálculos realizados del perímetro de una figura de ancho constante.

C.2. El área se mueve en todas las figuras encontradas entre  $\frac{1}{2} l^2 (\pi - \sqrt{3})$  que corresponde al área del triángulo de Reuleaux y  $\pi \frac{l^2}{4}$  que es el área del círculo. Resultando de triángulo de Reuleaux y círculo respectivamente:

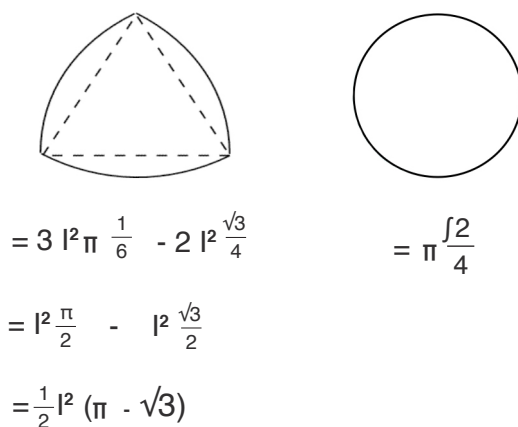


Figura C.2: Representación de los cálculos realizados del área para triángulo de Reuleaux y el círculo.

D. Se encontraron figuras de anchura constante, en diversos objetos y aplicaciones cumpliendo distintas funciones o supliendo al círculo, siendo el más utilizado el triángulo de Reuleaux.

## Discusión

Se puede afirmar que existen varias figuras de ancho constante descritas, siendo el más conocido de la familia, el triángulo de Reuleaux, que se crea a partir de un triángulo equilátero, y se llama así en honor a Franz Reuleaux, (1829–1905) su creador. La figura se construye “trazando desde cada uno de sus vértices el arco de circunferencia de radio  $L$  que pasa por sus dos vértices opuestos” (Alsina, 2005), por lo tanto, resulta la siguiente interrogante ¿Qué sucederá si se sustituye el triángulo equilátero, por cualquier otro polígono regular? Según Molina *et al.* (2012), gracias a la característica esencial del software Cabri, que permite formar figuras a partir de cualquier polígono con número impar de lados. La experimentación realizada con lápices y compás reafirma lo anteriormente expuesto, donde se trabajó con diversos polígonos regulares con números impares de lados, obteniendo los mismos resultados, es decir, positivos con generación de figuras de ancho constante.

En cuanto a los resultados obtenidos en la construcción de nuevas figuras, se puede aseverar que en la experimentación, se obtuvieron diversas figuras, las cuales fueron catalogadas como negativas o positivas. Ahora en cuanto a la construcción de figuras, surge la interrogante ¿Existe una única forma de construcción? Según lo consigna la literatura, “existen variados métodos de construcción de las figuras de ancho constante” (Molina *et al.*, 2012). Los cuales pueden partir de polígonos regulares e irregulares.

Por ejemplo se encuentra el “uso de hipocicloides u evolutas, en la construcción de la curva de ancho constante de Euler, también se crean a partir de figuras de ancho constante realizadas con anterioridad, o construidas de figuras convexas” (Molina *et al.*, 2012). El método propio utilizado en las figuras, consiste en dibujar el polígono y posteriormente trazar líneas rectas que sobresalen al lado opuesto de los vértices para poder formar los arcos de circunferencias correspondientes.



## ¿Cómo se crearon las nuevas figuras?

Se comenzó desde la curiosidad, experimentando con diversos polígonos, como triángulos, cuadriláteros, pentágonos y figuras de más lados y de diversas formas, no siguiendo ningún patrón o regla establecida. Posteriormente se logró identificar que ciertas figuras que poseían ciertas características, en su gran mayoría resultaban positivas como lo son las Figuras N° B1a, B1b, B1c, dado que cumplían con la cualidad de poseer un vértice opuesto a un lado, para poder así crear el arco de circunferencia. Posteriormente se debió cumplir con el último requisito, que la medida de la longitud entre un lado y su opuesto sea la misma desde cualquier parte que se tome la figura, en base a lo estudiado hasta el momento.

## Sin embargo, ¿Se pueden utilizar otras familias de figuras?

Según los estudios, junto con la experimentación realizada, se puede concluir que se pueden utilizar figuras de polígonos con 5 y 7 lados o incluso más.

## ¿Qué sucede con los polígonos de lados pares?

Como ya se mencionó, los polígonos deben cumplir con la característica de poseer un lado opuesto a un vértice, por lo tanto, las figuras de lados pares, no pueden ser utilizadas hasta el momento, porque no poseen un vértice opuesto a un lado, por ende no hay forma alguna de crear el arco respectivo, dando como resultados figuras que no son consideradas con anchura constante, como se puede observar en la Figura N° B2a, donde se observa que la figura no presenta propiedades de ancho constante. En cuanto a la Figura N° B2b, se consideró como método fallido porque para trazar los arcos de circunferencia se utilizaron los vértices adyacentes y no el opuesto, corrección que se utilizó para las siguientes figuras creadas. Por último, en la Figura N° B2c se puede observar que es considerada como negativa porque al ampliar las rectas de la figura genera una variación en el ancho de ésta, y por ende no puede ser considerada una figura de ancho constante. En relación a los cuadriláteros y hexágonos no pueden formar figuras de ancho constante, porque no se encontraron resultados positivos en ellos, mediante el método de creación antes señalado.

Se determinaron las fórmulas respectivas de área y perímetro al realizar el proceso de experimentación trabajando con varias figuras de ancho constante y se pudo aseverar que el perímetro es  $l\pi$ , donde  $l$  es el ancho de la figura, dicha fórmula permite determinar el perímetro de cualquier figura con ancho constante. En

cuanto al área, se pudo determinar que cualquiera de las figuras encontradas y revisadas se ubican entre los siguientes rangos  $\frac{1}{2} l^2 (\pi - \sqrt{3})$  y  $\pi \frac{l^2}{4}$  donde el triángulo de Reuleaux según lo descrito en la bibliografía y en los cálculos realizados de los sectores circulares, es la figura de ancho constante con menor área posible y el círculo es aquel que presenta la mayor área de todas las figuras con anchura constante conocidas hasta el momento.

El estudio bibliográfico realizado permitió identificar las figuras de ancho constante, y entender que se encuentran presentes en muchos lugares, objetos y variadas aplicaciones cumpliendo una función similar al círculo, por ejemplo, en las tapas de alcantarillas, vitrales de edificios históricos únicos de siglos pasados. Además de un edificio moderno que adoptó la forma del triángulo de Reuleaux, ruedas de bicicletas, logos de equipos de fútbol y vehículos, entre varias aplicaciones más. También se encuentran presente en lápices utilizados para el dibujo o de escritura. La marca de lápices, Paper Mate, con su bolígrafo kilométrico, color azul, negro o rojo, son algunos de los objetos donde se encuentran las figuras de ancho constante. Se cree que el motivo de hacer los lápices en forma de triángulo de Reuleaux, es para un agarre más fácil y cómodo, que los convencionales que circulan en el mercado que poseen una forma circular o hexagonal. A su vez, otro de los fundamentos para adquirir dicha forma, es la mayor dificultad de rodar y por lo tanto que se escape del mobiliario.

El mismo principio se cumple en el caso de las monedas de circulación frecuente como es el caso del Reino Unido. Los peniques de veinte y cincuenta, poseen una forma de heptágono, pero de anchura constante, significando que cumple el mismo principio que el círculo o el triángulo de Reuleaux. Ahora bien, ¿A qué se debe su forma? Dentro de las posibles respuestas, es porque “se ahorra material de fabricación” (Molina *et al.*, 2012), y por ende un menor costo a la hora de su producción masiva, puesto que está comprobado que el área de un triángulo de Reuleaux es menor al círculo, de mismo ancho. Pero quizás, aparte de su apariencia que las hace resaltar dentro de las demás, es que también “sirven para utilizar en las máquinas expendedoras, pues éstas miden la anchura de la moneda que es introducida en ellas” (Corbalán, 2007) no quedando obstruidas, como es el caso de otras figuras como los cuadrados, rectángulos o rombos por ejemplo.

## ¿En relación a patrimonios arquitectónicos?

Es quizás, donde más usos se pueden encontrar en todo el mundo, tanto en edificios históricos de varios



países europeos, como los vitrales de la Iglesia de Notre Dame, de Bélgica, la Sagrada Familia, en Barcelona, y la Catedral de Santa María de Regla de León en España. Dentro de las obras modernas se encuentra el edificio Energon en Alemania, que posee la forma del triángulo Reuleaux.

Por lo tanto, se puede asegurar que existe un uso importante en diversos objetos utilizados en Europa, donde se puede encontrar diversas utilidades, destacando en su gran mayoría figuras que fueron inspiradas en el triángulo de Reuleaux, junto con las familias de 5 y 7 lados.

En cuanto a las suposiciones realizadas en principio, se podía aseverar que las ruedas podrían ser modificadas en un futuro no muy lejano y ser más cotidianas entre los vehículos, utilizando otras figuras de ancho

constante, siguiendo el mismo principio que las ruedas de bicicletas inventadas por el chino Guan Baihua, que posee figuras de ancho constante de tres y cinco lados respectivamente en sus ruedas. Pero ¿Cuál será la característica principal de las ruedas circulares? “son redondas, porque así la altura respecto al suelo se mantiene constante”. (Corbalán, 2007), entonces ¿Es factible cambiar las ruedas circulares, por triángulo de Reuleaux? no es tan fácil, pues las figuras de ancho constante tienen una trayectoria que es poco sosegada, complicando su posible aplicación, pero no significa que se puedan llegar a utilizar en el futuro.

En síntesis, se pudo comprobar que las figuras de ancho constante están presentes en la vida de las personas en diversos objetos y cumpliendo en muchos casos funciones relacionadas con cualidades propias de los círculos.

## Conclusión

Se identificaron las figuras de ancho constante y se determinó que el triángulo de Reuleaux es el más conocido de ellos, después del círculo. Las figuras de ancho constante, como el triángulo de Reuleaux poseen propiedades similares a los círculos, rodar sin generar un vaivén y mantener su punto superior siempre a la misma altura. Se determinó que el triángulo rectángulo escaleno y el triángulo escaleno pueden formar figuras de ancho constante. Se determinó que una estrella construida, a partir de un pentágono irregular puede generar una figura de anchura constante. Los resultados negativos de la experimentación se obtuvieron al utilizar figuras de cuadriláteros y hexágonos, con el método utilizado. Se determinó la fórmula general para sacar el perímetro de las figuras de ancho constante, la cual es  $\pi l$ , donde  $l$ , es el ancho de la figura. Se determinaron fórmulas para encontrar el área de las figuras de ancho constante construidas, las cuales son exclusivas para cada figura construida. Se comprobó matemáticamente que el triángulo de Reuleaux, es la figura de ancho constante de menor área y que el círculo por su parte posee mayor área teniendo el mismo ancho. Se demostró que existen múltiples aplicaciones de las figuras de Reuleaux en el mundo, formando parte de diversas estructuras, como vitrales de edificios arquitectónicos, ruedas de bicicletas y monedas entre varias funciones más.

## Bibliografía

Alsina C. 2005. El Clip: homenaje a Reuleaux. SUMA: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas 48: 77-79.

Corbalán F. 2007. Matemáticas para la vida. Editorial GRAÓ, Barcelona, España.

Molina O, Gil L, Orjuela M. 2012. Figuras de anchos constante: un tema por explorar. Tecné, Episteme y Didaxis 32: 93-103.

